Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$.
(a) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
(b) [1 punto] Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución

Los apartados (a) y (b) se pueden hacer juntos pues lo único que hay que estudiar es la primera derivada f'(x), de la cual saldrá el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos
$f(x) = (3x - 2x^2)e^x$
$f'(x) = (x - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = e^x(-2x^2 - x + 3)$
De $f'(x) = 0$, $(-2x^2 - x + 3) = 0$, puesto que la exponencial e^x nunca se anula.
Las soluciones de $-2x^2 - x + 3 = 0$, son x = 1 y x = - 1'5, que serán los posibles máximos y mínimos relativos.
Como $f'(-2) = e^{-2}(-2(-2)^2 - (-2) + 3) = e^{-2}(-3) < 0$, f(x) es estrictamente decreciente en (- ∞, -1'5)
Como $f'(0) = e^{0}(3) = 1(3) > 0$, f(x) es estrictamente creciente en (-1'5, 1)
Como $f'(2) = e^{(2)}(-2(2)^2 - (2) + 3) = e^{2}(-7) < 0$, f(x) es estrictamente decreciente en (1, +∞)

Por definición x = -1'5 es un mínimo relativo que vale $f(-1'5) = (3(-1'5) - 2(-1'5)^2)e^{-1'5} = -9.e^{-1'5}$
Por definición x = 1 es un máximo relativo que vale $f(1) = (3(1) - 2(1)^2)e^{1} = e$

Ejercicio 2 de la Opción A del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

Considera las funciones f :(0,π) → R y g : (0, +∞) → R definidas por

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos^3(x)} \quad \text{y} \quad g(x) = x^3.\ln(x).$$ [ln denota la función logaritmo neperiano].

(a) [1'25 puntos] Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando x = π/3
(se puede hacer el cambio de variable t = cos x).
(b) [1'25 puntos] Calcula $\int g(x)dx$.

Solución

(a)
Una primitiva de f(x) es

$$F(x) = \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^3(x)}dx = \left\{ \text{cambio} \begin{matrix} t=\cos(x) \\ dt=-\text{sen}(x)dx \end{matrix} \right\} = \int \frac{-\,dt}{t^3} = -\frac{t^{-3+1}}{-3+1} + K =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Quito} \\ \text{cambio} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2.\cos^2(x)} + K$$

Como me dicen que F(π/3) = 1, tenemos $1 = 1/[2.\cos^2(\pi/3)] + K$, de donde K = -1 y la primitiva pedida es
$F(x) = 1/[2.\cos^2(x)] - 1$
(b)
Es una integral por partes $(\int udv = uv - \int vdu)$

$$\int x^3 \ln(x)dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln(x) \to du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3dx \to v = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right\} = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \int \frac{x^4}{4}.\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}.\frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{x^4}{16} + K$$

Ejercicio 3 de la Opción A del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

(a) [1 punto] Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= mx \\ x + 2y + z &= my \\ x + 2y + 4z &= mz \end{aligned}$$

(b) [1'5 puntos] Resuelve el sistema anterior para el caso m = 0 y para el caso m = 1.

Solución

(a)

$$\begin{cases} 2x+y+z=mx \\ x+2y+z=my \\ x+2y+4z=mz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2-m)x+y+z=0 \\ x+(2-m)y+z=0 \\ x+2y+(4-m)z=0 \end{cases}$$

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{pmatrix}$

Como es un sistema homogéneo, el sistema tiene más de una solución cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix}_{3^a+2^a(-1)} = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 0 & m & 3-m \end{vmatrix} = (2-m)[(2-m)(3-m)-m] - 1(3-m-m) =$$

$= -m^3 + 8m^2 - 16m + 9$

Para resolver $m^3 + 8m^2 - 16m + 9 = 0$, aplicamos Ruffini

	- 1	8	- 16	9
1		- 1	7	- 9
	- 1	7	- 9	0

Una solución es m = 1, y las otras salen de resolver la ecuación $-m^2 + 7m - 9 = 0$, obteniéndose

$m = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$ y $m = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$

Por tanto para m = 1, $m = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$ y $m = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$ el sistema tiene más de una solución

(b)

En el caso de m = 0, solo tiene la solución trivial (x,y,z) = (0,0,0)

En el caso de m = 1, tiene infinitas soluciones. Tomo las ecuaciones 2ª y 3ª (con ellas el rango de A es 2)

x +y + z = 0

x +2y +3z = 0. Hacemos $z = \lambda \in \Re$

$x + y = -\lambda$

$x + 2y = -\lambda$. 2ª + 1ª(-1), y nos resulta $y = -2\lambda$ y $x = \lambda$, por tanto la solución del sistema para m = 1 es

$(x,y,z) = (\lambda, -2\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in \Re$

Ejercicio 4 de la Opción A del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

Se considera la recta r definida por mx = y = z + 2, ($m \neq 0$),

y la recta s definida por (x − 4)/4 = y − 1 = z/2

(a) [1'5 puntos] Halla el valor de m para el que r y s son perpendiculares.

(b) [1 punto] Deduce razonadamente si existe algún valor de m para el que r y s son paralelas.

Solución

(a)

Ponemos la recta $r \equiv mx = y = z + 2$, en forma continua x/(1/m) = y/1 = (z + 2)/1. Un vector director suyo es (1/m, 1, 1) y otro paralelo es **u** = (1, m, m)

La recta s ya me la han dado en forma continua (x − 4)/4 = (y − 1)/1 = z/2. Un vector director suyo es **v** = (4, 1, 2)

Las rectas "r" y "s" son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares, es decir su producto escalar es cero

0 = **u** • **v** = (1, m, m) • (4, 1, 2) = 4 + m + 2m, por tanto 3m = - 4, de donde m = - 4/3

(b)

Las rectas "r" y "s" son paralelas si lo son sus vectores directores, es decir sus coordenadas son proporcionales. En nuestro caso

1/4 = m/1 = m/2, lo cual es absurdo pues m no puede ser a la vez 1/4 y 1/2, luego no hay ningún valor de "m" para el que las rectas sean paralelas.

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Dada la función f definida, para $x \neq 0$, por $f(x) = (e^x + 1)/(e^x - 1)$ determina las asíntotas de su gráfica.

Solución

La recta x = a es una asíntota vertical (A.V.) de la función f si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Suelen ser los valores de "x" que anulan el denominador.
De $e^x - 1 = 0$, tenemos $e^x = 1$, luego $x = 0$
Veamos si x = 0 es A.V.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$, **la recta x = 0 es una A.V. de la función *f*.**

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

La recta y = k es una asíntota horizontal (A.H.) de la función f si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$

Lo estudiamos en + ∞ y en - ∞

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} = \left\{ \dfrac{\infty}{\infty}, \begin{matrix} \text{Aplicamos} \\ \text{L'Hôpital} \end{matrix} \right\} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} (1) = 1$, **la recta y = 1 es una A.H. de la función f en + ∞.**

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{e^x} + 1}{\dfrac{1}{e^x} - 1} = \dfrac{0 + 1}{0 - 1} = -1$, **la recta y = -1 es una A.H. de la función f en - ∞.**

Veamos la posición relativa respecto a las A.H.
En + ∞

Como $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} - 1 \right) = 0^+$, la función está por encima de la A.H.

Como $\lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} + 1 \right) = 0^-$, la función está por debajo de la A.H.

La recta y = mx+n es una asíntota oblicua (A.O.) de la función f si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$, *donde*

$m = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *y* $n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$

Esta función **no tiene A.O**.

Ejercicio 2 de la Opción B del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = (1/4)x^3 - x^2 + x$.
(a) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de g.
(b) [0'75 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa x = 2.
(c) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g y el eje de abscisas.

Solución

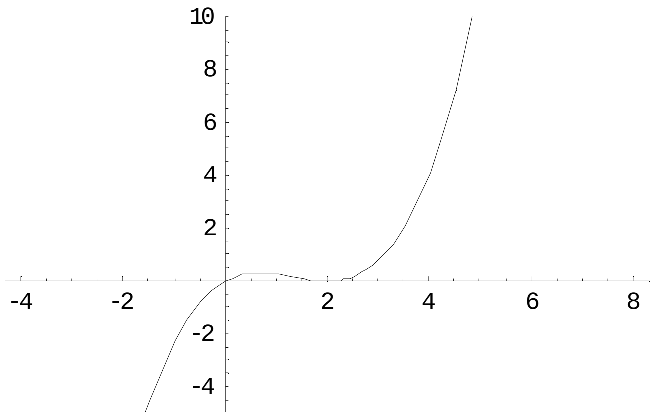
(a)
$g(x) = (1/4)x^3 - x^2 + x$ es un cúbica. Veamos sus cortes con los ejes y su comportamiento en ± ∞
Corte con ordenadas.
g(0) = 0, punto (0,0)
Corte con abscisas.

g(x) = 0, $(1/4)x^3 - x^2 + x = 0$, resolviendo la ecuación sale x = 2(doble), punto (2,0)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}x^3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^3\right) = -\infty$$

Un esbozo de la gráfica es



(b)

De la gráfica se observa que la recta tangente en x = 2, es una tangente horizontal es decir y = 0. Vamos a comprobarlo

La recta tangente a g(x) en x = 2 es y – g(2) = g'(2)(x - 2).

$g(x) = (1/4)x^3 - x^2 + x$, g(2) = 0.

g '(x) = $(1/4)x^3 - x^2 + x$, g '(2) = 0.

Sustituyendo tenemos que la recta tangente es y – 0 = 0(x - e), es decir y = 0.

(c)

El área pedida es $\text{Área} = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x\right)dx = \left[\frac{1}{4}.\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = [\ 1 - 8/3 + 2\ ] = [\ 1/3]\ u^2$

Ejercicio 3 de la Opción B del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.

(b) [1'25 puntos] Para k = 0, halla la matriz inversa de A.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4 \neq 0$, por lo menos rango(A) = 2

Si det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = 3 y si |A| = 0 rango(A) = 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix}_{3^a+1^a(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4(3 - k^2)$$

Si |A| = 0, tenemos $(3 - k^2) = 0$ de donde $k = +\sqrt{3}$ y $k = -\sqrt{3}$

Si $k \neq +\sqrt{3}$ y $k \neq -\sqrt{3}$, rango(A) = 3

Si $k = +\sqrt{3}$ y $k = -\sqrt{3}$, rango(A) = 2

(b)

Si k = 0, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, |A| = 4(3 – 0) = 12 ≠ 0, tiene matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^T)$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $Adj(A^T) = \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -3/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/12 & 1/3 & -1/12 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 de la Opción B del Modelo 6 de Sobrantes de 2008

Considera los puntos A(2, 0, 1), B(−1, 1, 2), C(2, 2, 1) y D(3, 1, 0).

(a) [1 punto] Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos B, C y D.

(b) [1’5 puntos] Halla el punto simétrico de A respecto del plano π.

Solución

A(2, 0, 1), B(−1, 1, 2), C(2, 2, 1) y D(3, 1, 0).

(a)

Plano π que contiene a los puntos B, C y D

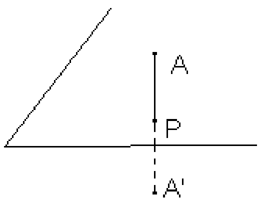
Punto B(−1, 1, 2), vectores paralelos independientes el **BC** = (3, 1, -1) y el **BD** = (4, 0, -2)

Ecuación continua

$$0 = \det(\vec{x} - \vec{a}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (x + 1)(-2) - (y - 1)(-2) + (z - 2)(-4) = -2x + 2y - 4z + 4 = 0$$

Simplificando tenemos – x + y – 2z + 2 = 0 y un vector normal sería **n** = (-1, 1, -2)

(b)



Para calcular el simétrico del punto A respecto del plano π ≡ - x + y – 2z + 2 = 0, lo que hacemos es calcular el simétrico del punto A sobre su proyección ortogonal P sobre el plano.

Una forma de hacerlo es calcular la recta perpendicular al plano que pasa por A. Su punto es A(2, 0, 1) y su vector director el normal del plano, es decir **u** = **n** = (-1, 1, -2)

Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda, \text{ con } \lambda \in R \end{cases}$

Calculamos P como intersección de la recta con el plano, sustituyendo la ecuación de la recta en el plano -(2 - λ) + (λ) – 2(1 -2λ) + 2 = 0. De donde λ = 1/3, y el punto P es P(2 – 1/3, 1/3, 1-2(1/3)) = P(5/3, 1/3, 1/3).

P es el punto medio del segmento AA’, siendo A’ el simétrico buscado.

(5/3, 1/3, 1/3) = ((2 + x)/2, y/2, (z + 1)/2) de donde x = 4/3, y = 2/3 y z = -1/3, es decir el punto simétrico buscado es A’(4/3, 2/3, -1/3)